PART2 分数で表された数列の和

要点① 分数で表された数列の和

数列 $\dfrac{1}{1\cdot2}$, $\dfrac{1}{2\cdot3}$, $\dfrac{1}{3\cdot4}$, ……の初項から第 n 項までの和を求める。

この数列の第 n 項は　　　　　であり

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

である。この数列の初項は $\dfrac{1}{1\cdot2}=$　　　　　と変形することができる。第2項以降も同様の変形を行うことにより，求める和は

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\qquad\quad+\qquad\quad+\cdots\cdots+$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{(n+1)-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

※ある分数式を分解して，複数の分数式の和の形(または多項式と複数の分数式の和の形)で表すことを「部分分数分解」という。

[MEMO]

2 次の問いに答えよ。

(1) 等式 $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 次の和 S を求めよ。

$$S=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Point Pickup

分数で表された数列の和

数列の各項が，分母が積の形である分数で表されているとき，各項を複数の分数の差の形で表すことで，その数列の和を求めることができる場合がある。

第 4 講　PART2 確認問題

1　k を自然数として，次の等式が成り立つことを証明する。

$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}$$

（証明）

$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{(\boxed{\text{ア}})-(\boxed{\text{イ}})}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{\boxed{\text{ア}}}{(2k-1)(2k+1)}-\frac{\boxed{\text{イ}}}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{2k-1}-\frac{\boxed{\text{エ}}}{2k+1}$$

よって，$\dfrac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}$

（証明終わり）

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ は，次の①～⑥のうちから選べ。

① 1　　② 2

③ k　　④ $k+1$

⑤ $2k-1$　　⑥ $2k+1$

2　次の和を求めよ。

$$\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{2}{23\cdot25}=\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

PART2 分数で表された数列の和

2 次の問いに答えよ。

(1) 等式 $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 次の和 S を求めよ。

$$S=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

[解答]

(1) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

よって $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

(2) $S=\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2n+1)-1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2n}{2n+1}=\dfrac{n}{2n+1}$

第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑥，イ：⑤，ウ：①，エ：①

[解説]

（証明）

$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{\boldsymbol{(2k+1)-(2k-1)}}{(2k-1)(2k+1)}$$ [A]

$$=\frac{2k+1}{(2k-1)(2k+1)}-\frac{2k-1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{\boldsymbol{1}}{2k-1}-\frac{\boldsymbol{1}}{2k+1}$$

よって，$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}$

（証明終わり）

[A]　分子の 2 を，$2k-1$ と $2k+1$ を使って表すことを考える。
このようにすることで，約分ができる。

2

[正解] オカ：24，キク：25

[解説]

$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}$$ [B]

であるから，

$$\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{2}{23\cdot25}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{25}\right)$$

$$=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}+\cdots\cdots+\cancel{\frac{1}{23}}-\frac{1}{25}$$ [C]

$$=1-\frac{1}{25}$$

$$=\frac{24}{25}$$

[B]　この式変形に着目して，元の式を変形する。

[C]　隣り合う項どうしで消し合う。